广东财经大学硕士研究生入学考试试卷

考试年度 2024 年　　**考试科目代码及名称** 807-高等代数（统计学）（自命题）
适用专业 071400 统计学

[友情提醒：请在考点提供的专用答题纸上答题，答在本卷或草稿纸上无效！]

一、计算题 (6 题，每题 10 分，共 60 分)

1. 将 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 在实数范围内分解因式.

2. 计算行列式的值：
$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$$

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$.
   (1) 求 a 的值；
   (2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

4. 讨论 λ 取何值时，方程组
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=1 \end{cases}$$
有解，在有解时计算方程组的解.

5. 已知 3 维向量空间 P^3 的两组基为
$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,4)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(2,2,8)^T;$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,1)^T, \boldsymbol{\beta}_2=(-2,2,-1)^T, \boldsymbol{\beta}=(-1,1-1)^T.$$
向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$，求 $\boldsymbol{y}$ 被 $\boldsymbol{x}$ 表示的表达式.

6. 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

二、 应用题 (4 题，每题 15 分，共 60 分)

1. 计算：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2024}$

2. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.
   (1) 证明 $r(\boldsymbol{A}) = 2$;
   (2) 若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

3. 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_{2024}$ 为 2023 阶实方阵. 证明: 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{2024}$ 的方程
$$\det(x_1\boldsymbol{A}_1 + x_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + x_{2024}\boldsymbol{A}_{2024}) = 0$$
   至少有一组非零实数解，其中 det 表示行列式.

4. 用正交线性替换化下列二次型为标准形:
$$2x_1x_2 + 2x_3x_4$$

三、 证明题 (2 题，每题 15 分，共 30 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，ζ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量. $\phi(x)$ 是一个一元多项式，$\partial(\phi(x)) \geq 1$. 那么 $\phi(\lambda)$ 是 $\phi(\boldsymbol{A})$ 的特征值，ζ 是属于 $\phi(\lambda)$ 的特征向量.

2. 证明：
$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\alpha+\beta) & \sin 2\beta & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\alpha+\gamma) & \sin(\beta+\gamma) & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$