广东财经大学硕士研究生入学考试试卷

考试年度 2023 年 **考试科目代码及名称** 807-高等代数（统计学）（自命题）
适用专业 071400 统计学

[友情提醒：请在考点提供的专用答题纸上答题，答在本卷或草稿纸上无效！]

一、计算题 (6 题，每题 10 分，共 60 分)

1. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & x \\ a & a & \cdots & x & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & x & \cdots & a & a \\ x & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$.

2. 如果数域 P 上的多项式 $(x+1)^2 \mid Ax^4 + Bx^2 + 1$, 求 A, B.

3. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + ax_4 = b \end{cases}$, 请回答下列问题:
   (1) 方程组是否可能有唯一解, 为什么? 当参数 a, b 满足什么条件时, 方程组无解?
   (2) 当参数 a, b 满足什么条件时, 方程组有无穷多解? 请求出此条件下方程组的通解.

4. 已知 n 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}$, 计算 A^m(m 为正整数).

5. 设 R^4 的两个子空间为

$$U = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
$$W = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$$

   (1) 求 $U \cap W$ 的基与维数;
   (2) 求 $U + W$ 的基与维数.

6. 已知 R^2 上线性变换：$\tau : \begin{cases} y_1 = ex_1 + fx_2 \\ y_2 = gx_1 + hx_2 \end{cases}$ $\sigma : \begin{cases} z_1 = ay_1 + by_2 \\ z_2 = cy_1 + dy_2 \end{cases}$
   (1) a, b, c, d 满足什么条件时，σ 是可逆变换？
   (2) 计算 $\sigma\tau$ 在基 $\boldsymbol{i} = (1, 0)^T, \boldsymbol{j} = (0, 1)^T$ 下的矩阵.

二、 应用题 (4 题，每题 15 分，共 60 分)

1. 已知 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & f \\ b_1 & b_2 & b_3 & f \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \\ d_1 & d_2 & d_3 & f \end{vmatrix}$，求 $M_{11} - M_{21} + M_{31} - M_{41}$.

2. 已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

3. t 取什么值时, 二次型
$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$
是正定的？

4. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ $(b > 0)$, 其中二次型矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.
   (1) 求 a, b 的值;
   (2) 利用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

三、 证明题 (2 题，每题 15 分，共 30 分)

1. 设 A, B, C, D 都是 n 阶方阵, A 可逆, 且 $AC = CA$. 证明:
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$
.

2. 证明: 对 n 维线性空间 V 中的任意两子空间 V_1, V_2, 它们的并 $V_1 \cup V_2$ 是 V 的子空间的充要条件是 $V_1 \subseteq V_2$ 或者 $V_2 \subseteq V_1$.